MÁS ALLÁ DE LOS AZULEJOS DE MI BAÑO

Posted on 4 marzo, 2016 by Gustavo M. Rodríguez Liñán

Aunque todas las mañanas camino sobre ellos con los pies descalzos, casi nunca presto atención a esos objetos que decoran el piso y las paredes de mi baño. Pero no sólo los encuentro en el baño, sino en la cocina y, de hecho, en toda la casa. Todos tienen la misma forma y el mismo tamaño..

Category: Ciencia

Tag: Ciencias Exactas

Aunque todas las mañanas camino sobre ellos con los pies descalzos, casi nunca presto atención a esos objetos que decoran el piso y las paredes de mi baño.

> *¿Por qué todos los azulejos tienen la misma forma?*

No sólo los encuentro ahí, sino en la cocina y, de hecho, en toda la casa. Todos tienen la misma forma y el mismo tamaño: cuadrados de 30 cm de lado, formando un patrón regular. Los de las paredes son en realidad más pequeños, pero su forma es la misma.

Doy un paseo en bicicleta por el camino recién pavimentado con baldosas de ese material al que llaman *adocreto*, y me doy cuenta que su forma es distinta al del mosaico en mi casa. ¡Son hexágonos! Y sin embargo, el patrón formado es absolutamente regular, sin defectos, sin huecos, al igual que el de los azulejos cuadrados. Entonces, no todos los azulejos deben tener la misma forma necesariamente. ¿Qué figuras geométricas se pueden utilizar para generar un enlosado sin agujeros y sin empalmes, utilizando una única figura? Tal vez la manera más sencilla de contestar esta pregunta es pensar primero en los polígonos regulares, esas figuras que conocimos por primera vez en las clases de geometría de la primaria, que tienen todos sus lados y sus ángulos internos iguales y que, de hecho, sabemos sus nombres de memoria: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono…

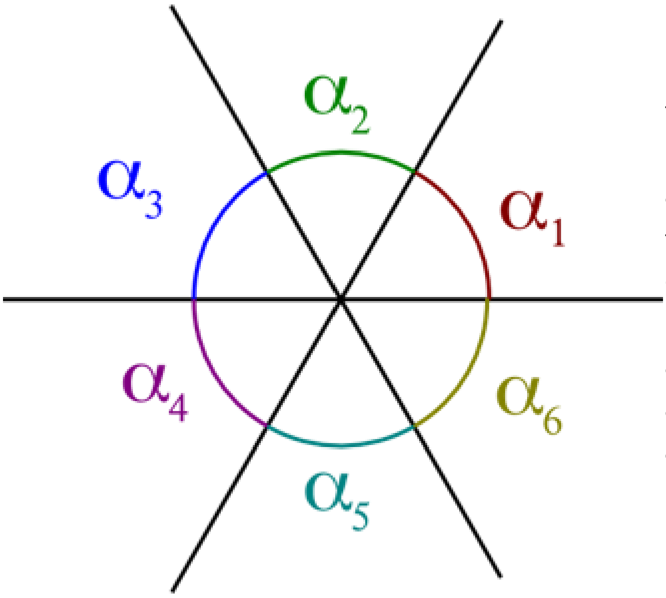

Figura 1. La suma de los ángulos internos αi de los vértices que convergen en un mismo punto debe ser igual a 360° para que se complete un círculo.

Lo primero que puedo notar es que para poder formar un mosaico, cada vértice de los azulejos debe ser tocado por otros vértices de azulejos similares, de modo que se cierre una vuelta completa. Esto implica que los ángulos internos de todos los vértices que tocan un punto deben sumar exactamente 360° (Figura 1). Como estoy tratando con polígonos regulares, los ángulos internos de estos deben ser 360° dividido entre un número entero n; de otra forma quedaría un hueco o quedarían sobrepuestos. Si *n* es 1 o 2, tendría un ángulo interno de 360° o de 180°. El primer valor no tiene sentido, puesto que es una sola línea recta. En el segundo caso, si los lados de un polígono forman un ángulo de 180° entre sí, esos dos lados son en realidad uno solo, puesto que caen sobre la misma línea recta; así que esto tampoco es posible. Por lo tanto, el valor mínimo que puede tomar *n* es de 3 en adelante. Dividiendo 360° entre 3, 4, 5,…, obtengo 120°, 90°, 72°, 60°,… El polígono regular cuyos ángulos internos miden 120° es el hexágono. El segundo caso es el cuadrado. No existe ningún polígono regular con ángulos internos de 72°. El cuarto polígono obtenido de esta manera es el triángulo equilátero. Puesto que este último es el polígono regular más simple que se puede obtener, la secuencia lógica me dice que no conseguiré más figuras posibles.

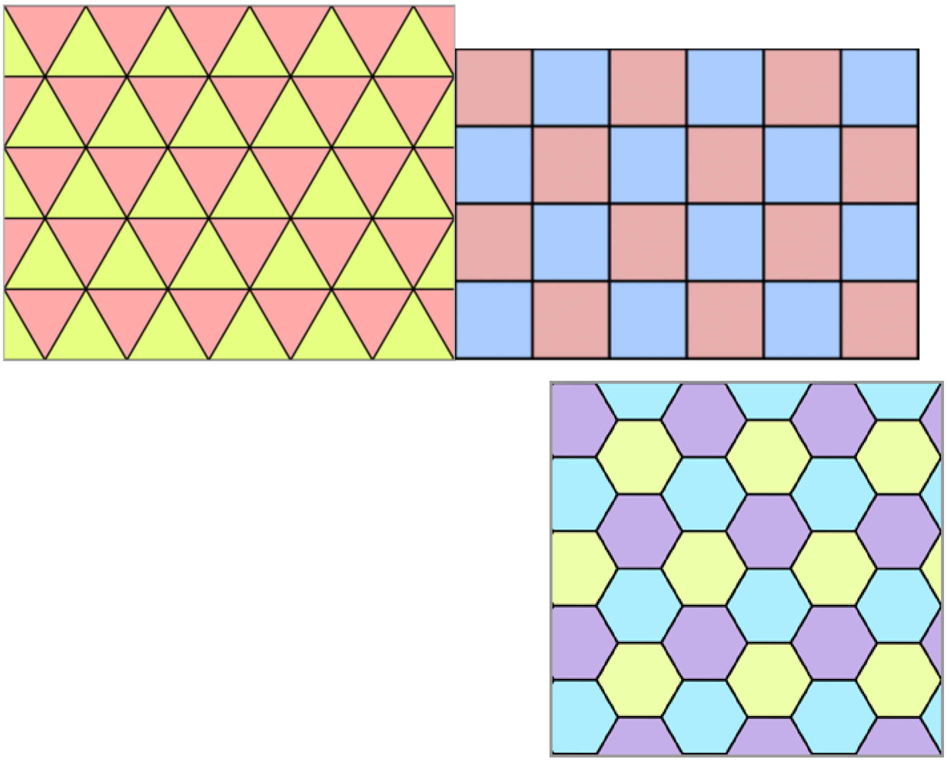

Figura 2. Existen solamente tres tipos de teselados regulares posibles: triangular (arriba), cuadrado (centro) y hexagonal (abajo).

Entre los matemáticos, los patrones formados por la repetición de figuras geométricas puestas unas junto a otras son conocidos como “teselados” o “teselaciones” (aunque el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española solamente reconoce el término “teselado”). El término proviene de la palabra latina *tessella*, que significa "pequeño cuadrado" y que hace referencia a los pequeños bloques cúbicos que en la Antigua Roma se utilizaban para pavimentar los caminos. Con los cálculos anteriores, queda claro que los únicos teselados regulares se forman con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos (Figura 2). He aquí el porqué de que casi todos los azulejos sean cuadrados, triángulos, o hexágonos.

¿Casi? La artista y fotógrafa británica Helen Donelly caminaba por las calles de El Cairo, Egipto, cuando un curioso patrón de las baldosas de la acera llamó su atención. Contó el número de lados de una de las baldosas, todas ellas iguales en forma y tamaño: uno, dos, tres, cuatro, cinco. ¿Pentágonos? Pero, ¡cómo es posible! ¿No hemos dicho que sólo se pueden formar enlosados con triángulos, cuadrados o hexágonos? ¡Ah, pero es que estos pentágonos no son pentágonos regulares! De hecho, parecen pentágonos que han sido aplastados en su dirección vertical. Este teselado ya era conocido por los matemáticos mucho antes que fuera notado por Donelly (Figura 3). Es conocido precisamente como "teselado de El Cairo", por encontrarse en el pavimento de muchas calles de esta ciudad del norte de África.

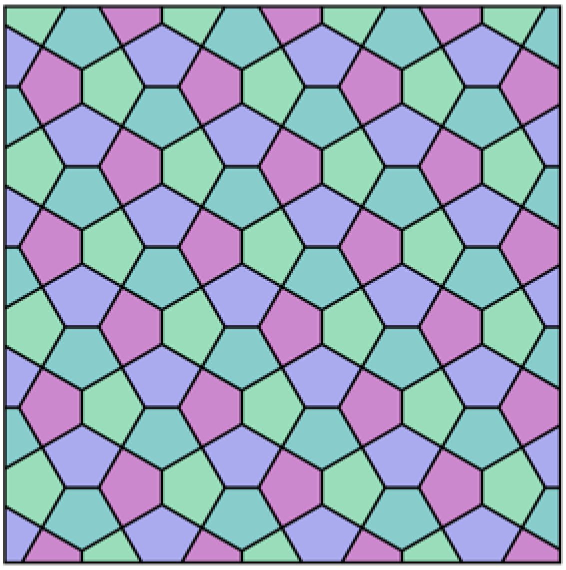

Figura 3. El teselado de El Cairo, común en las calles de esta ciudad egipcia, está formado por pentágonos irregulares. Fuente: Wikimedia Commons.

La búsqueda de teselados pentagonales se volvió todo un campo de estudio entre los matemáticos. Para 1918, se conocían cinco tipos de pentágonos irregulares que pueden formar teselados. En 1968 se descubrieron otros tres, y para 2012 ya se habían encontrado catorce clases distintas de "teselados" formados con pentágonos irregulares. El año pasado (2015) se halló el decimoquinto tipo de teselado pentagonal, encontrado por los matemáticos de la Universidad de Washington-Bothell, C. Mann, J. McLoud y D. von Derau (Figura 4). Hasta la fecha no se ha podido demostrar si estos son todos los tipos posibles de teselados pentagonales o si existen aún más.

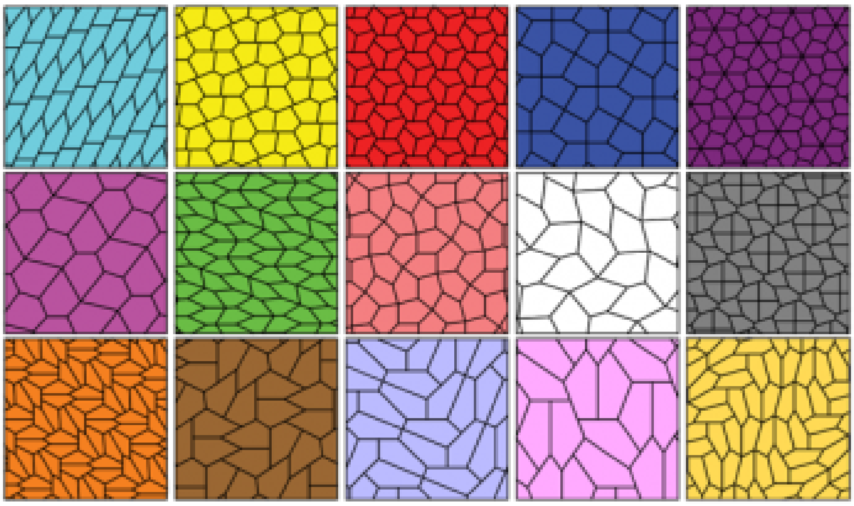

Figura 4. Hasta agosto de 2015 se conocían quince tipos de teselados formados con pentágonos irregulares. El último encontrado se muestra en el cuadro inferior derecho.

Y ¿qué hay de los demás polígonos irregulares? Está demostrado que cualquier triángulo, sea equilátero o no, puede formar mosaicos. Sólo es cuestión de dar la vuelta al azulejo de manera que encaje. Lo mismo sucede con todos los cuadriláteros. En el caso de los hexágonos irregulares, se han encontrado solamente tres clases de ellos que pueden formar teselados. Asimismo, está demostrado que no es posible formar este tipo de patrones con heptágonos, octágonos y demás polígonos irregulares convexos. Por convexos me refiero a aquellas figuras cuyos ángulos sobresalen de las mismas (Figura 5).

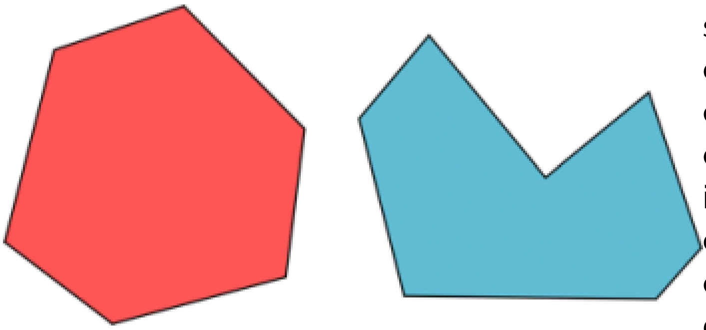

Figura 5. Los polígonos convexos (izquierda) son aquellos cuyos ángulos sobresalen todos de la figura, mientras que los cóncavos (derecha) poseen cuando menos un ángulo que entra en ella.

¿Y si los polígonos no son convexos?, es decir, si tienen un ángulo que “se mete” dentro de la figura

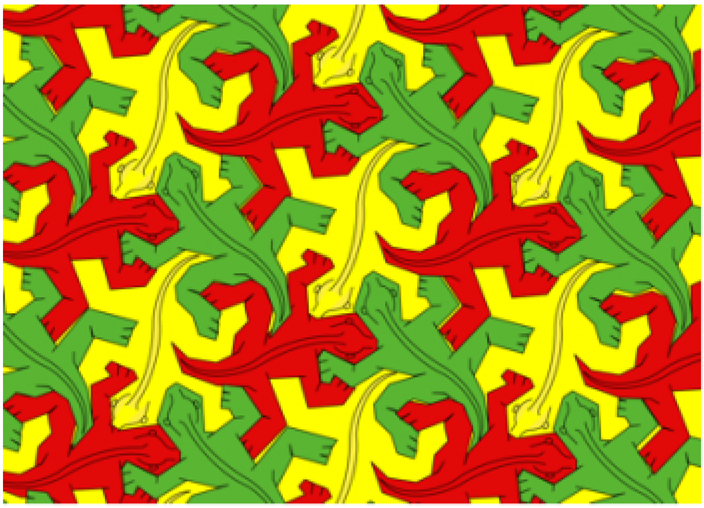

Figura 6. Teselado formado por polígonos en forma de lagartija.

. Resulta que las posibilidades aumentan dramáticamente. Y tanto es así que es posible generar patrones con figuras tan complejas como queramos. Alguien que demostró gráficamen te esto fue el artista neerlandés M. C. Escher, quien dibujó teselados a partir de formas tan complicadas como pájaros, reptiles y ángeles (Figura 6).

La cosa no acaba aquí, puesto que he mencionado solamente teselados formados por baldosas idénticas. Las posibilidades se vuelven infinitas cuando se utilizan azulejos de una forma arbitraria y se llenan los huecos con otros azulejos que tengan la forma de los agujeros. Por ejemplo, si se utilizan baldosas en forma de octágonos regulares es necesario utilizar cuadrados para cerrar el enlosado (Figura 7). Por cierto, a este tipo de teselados formados por dos clases de polígonos regulares se les llama “teselados semirregulares”.

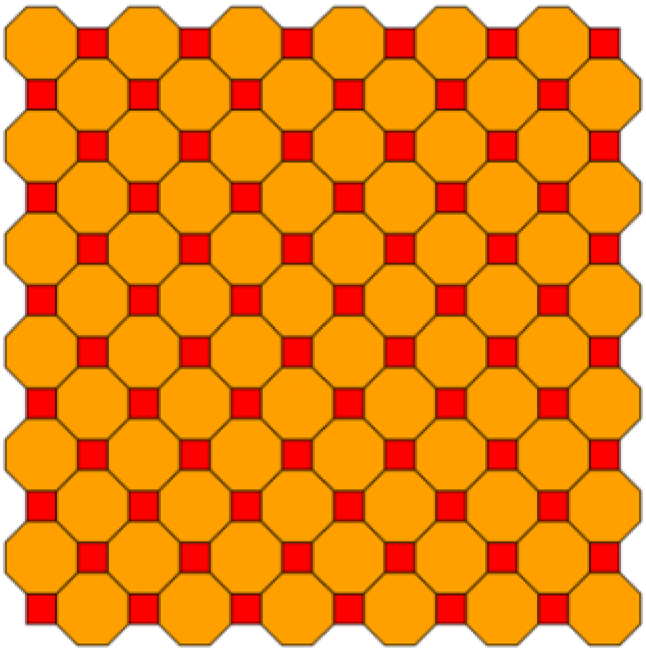

Figura 7. Teselado semirregular formado con octágonos regulares y cuadrados.

Para concluir, regreso al sitio donde comenzó toda esta intriga: el cuarto de baño. ¡Quién iba a pensar que las matemáticas me seguirían hasta este lugar! Pero es que a veces olvido que están en todas partes. No obstante, el problema de los teselados ha acompañado al ser humano desde que se vio en la necesidad de tapizar sus suelos y sus paredes. Aunque parezca tan prosaico, y aunque en Occidente estemos acostumbrados a los pavimentos cuadrados o, si acaso, hexagonales, en otras culturas es bastante común encontrar teselados con formas muy diversas, lo que provoca la necesidad de resolver un problema matemático que puede llegar a ser bastante complejo. Un ejemplo muy importante de estos teselados no convencionales —para nosotros— lo encontramos en el arte islámico (Figura 8), expuesto en las bellas decoraciones de las paredes de las mezquitas, donde no sólo se ve el talento de los artistas sino el aprovechamiento de los materiales utilizados.

Aunque yo tenga que seguir viendo ese aburrido mosaico cuadrado, color azul pálido, que llena la pared de mi baño, me queda la satisfacción de que hay matemáticas en él. C^2

Figura 8. Teselado formado con diversas figuras geométricas en Marrakech, Marruecos.

Referencias.

- Grünbaum, B.; Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman.
- Weisstein, Eric W. "Tessellation." de MathWorld, – A Wolfram Web Resource.
- David Bailey (2009). "Cairo Tiling", en David Bailey's World of Escher-like Tessellations. .
- Weisstein, Eric W. "Hexagon Tiling." de MathWorld – A Wolfram Web Resource.