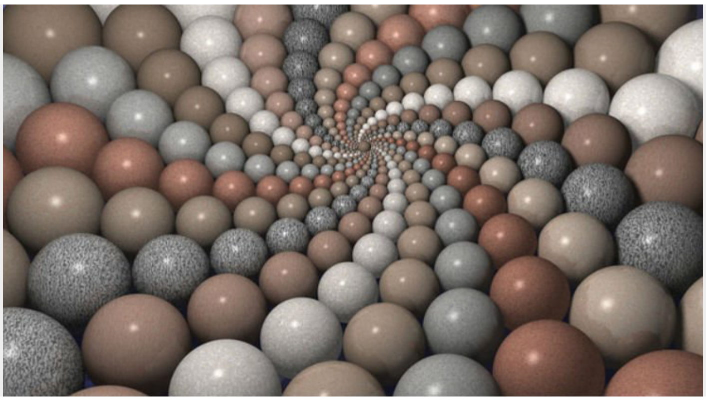
LA CONJETURA DE KEPLER Y LA PÁTINA DEL TIEMPO

Posted on 21 marzo, 2017 by Eduardo Santillan Zeron



En matemáticas, hay teoremas y teorías que son olvidados y abandonadas con el paso de los años, mientras que otros resultados son redescubiertos, reexaminados y extendidos una y otra vez, adquiriendo así una hermosa pátina.

Category: Ciencia

Tag: Ciencias Exactas

Entraba un lunes a las instalaciones del Cinvestav en Zacatenco cuando me di cuenta de que algo había cambiado; no sabía qué, pero algo era ciertamente diferente.

Pasaron unos segundos antes de que mi cerebro pudiera reaccionar ante lo que veían mis ojos: el busto de Arturo Rosenblueth, a la entrada del auditorio del mismo nombre, estaba pintado de dorado.

Ya no era un busto de bronce con una hermosa pátina resultado del paso de los años; en cuyo color se inspiró Amado Nervo para escribir el poema *La Raza de Bronce*, en honor al benemérito de las Américas: Benito Pablo Juárez García. Tenía ante mis ojos lo que parecía ser una escultura cubierta de pintura dorada. No puede ser –me dije en silencio. Me acerqué al busto del profesor

Rosenblueth, y en efecto, pude verificar que lo habían pulido y pintado, eliminando así su hermoso color bronce natural.

> *¿Por qué es tan importante la pátina del tiempo para un matemático?, se podrá preguntar el lector.*

La pátina es un óxido que se forma lentamente con el paso de los años sobre los objetos de bronce. Ésta no sólo nos indica cuan antiguo es un objeto, sino cuan indemne ha sobrevivido al paso de los años. En matemáticas sucede algo muy similar; hay teoremas y teorías que son olvidados, mientras que otros son redescubiertos, reexaminados y extendidos una y otra vez, adquiriendo así una hermosa pátina.

La conjetura de Kepler es uno de los mejores ejemplos de aquellos problemas en matemáticas que han adquirido una hermosa pátina de más de cuatro siglos (esperemos que a nadie se le ocurra cubrir esta conjetura con pintura dorada un día de éstos). Hace poco más de dos años fue publicada en esta misma revista una descripción de la conjetura de Kepler y su historia: https://www.revistac2.com/stacking-oranges/. Así, solamente necesitamos agregar ahora que entre sus creadores se encuentran el pirata Sir Walter Raleigh (1554--1618), el matemático Thomas Harriot (1560--1621) y el físico Johannes Kepler (1571--1630); y que el mismo Kepler conjeturó que al apilar esferas iguales, la máxima densidad posible se alcanza con un apilamiento cúbico centrado en las caras.

> *El gran matemático Carl Friedrich Gauss fue uno de los primeros en demostrar la validez de la conjetura de Kepler …*

El gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777--1855) fue uno de los primeros en obtener resultados positivos al respecto; demostró la validez de la conjetura de Kepler cuando las esferas están acomodadas en forma regular y simétrica, formando una retícula cúbica centrada en las caras o una retícula hexagonal compacta, como los átomos en un cristal de oro o de zinc. De hecho, Gauss también demostró que al acomodar esferas en una superficie plana, la máxima densidad posible se alcanza con un arreglo o empedrado hexagonal, en donde cada esfera está en contacto directo con otras seis.

Obviamente, los trabajos de Gauss dieron una respuesta parcial a la conjetura de Kepler, ya que todavía quedaba la posibilidad que algún apilamiento irregular de esferas iguales pudiera tener una densidad mayor a la alcanzada por la retícula anterior. Hubo que esperar hasta el siglo XXI para poder decir que, en efecto, esta conjetura era verdadera.

> *La genialidad de Gauss sigue resonando hasta nuestros días.*

Sin embargo, la historia no queda ahí, la conjetura de Kepler sigue acumulando pátina, pese a que ya fue verificada (para el caso tridimensional). La genialidad de Gauss sigue resonando hasta nuestros días. De entrada, él no sólo analizó el problema de apilar o acomodar esferas en el espacio tridimensional, sino que consideró el mismo problema en otras dimensiones.

Dije arriba que Gauss demostró que al acomodar esferas en una superficie plana la máxima densidad posible se alcanza con un arreglo hexagonal. Más aún, también entendió la importancia de clasificar los arreglos en regulares (en forma de retícula, como los átomos en un cristal) e irregulares.

Esta clasificación es tan importante que uno puede estar tentado a pensar que los arreglos regulares son los que siempre tienen la máxima densidad posible en todas las dimensiones. Esto es al menos cierto en las dimensiones 1, 2, 3, 8 y 24. Sin embargo, fue una gran sorpresa cuando se descubrieron arreglos irregulares cuya densidad es mayor a la de los regulares en las dimensiones 10, 11, 13, 27, 28, 29, 30 y otras.

> *¿Por qué analizar arreglos de esferas en dimensiones mayores a 3?*

Por un lado, como bien contestó George Mallory cuando le preguntaron el porqué quería escalar el monte Everest (en donde por cierto murió): *because it's there* (porque está ahí). Por otro lado, la solución de este problema tiene muchas aplicaciones en el área de telecomunicaciones.

Por ejemplo, muchas veces el espacio de variables necesarias para modelar un canal de comunicaciones tiene dimensión mayor a tres; y como siempre es deseable enviar o empacar el mayor número posible de paquetes de datos en el mismo canal de comunicaciones, sin que haya interferencias entre ellos, uno termina analizando el problema de acomodar el mayor número posible de esferas en un espacio de dimensión mayor a tres.

Ahora bien, una de las mejores noticias de 2016 fue que la conjetura de Kepler recibió un merecido retoque de pátina; pues el 14 de marzo de 2016, Maryna Viazovska presentó una demostración donde ve que al acomodar esferas siguiendo el patrón de una retícula tipo E8 se obtiene una densidad mayor a la de cualquier otro arreglo regular o irregular de esferas en un espacio de dimensión 8. Un par de semanas después, Cohn, Kumar, Miller, Radchenko y Viazovska presentaron otra demostración, donde un resultado similar se cumple cuando se usa una retícula Leech en un espacio de dimensión 24.

¿Qué tienen de especial 8 y 24? La respuesta es que aparecen nuevos tipos de simetría en dimensiones 1, 2, 4, 8 y 24. Por ende, es posible encontrar empacamientos de esferas más simétricos y densos. Las primeras cuatro dimensiones corresponden a los números reales, complejos, cuaterniones y octoniones. Por ejemplo, las simetrías en dimensión 1 son las reflexiones (como en un espejo); en dimensión 2 tenemos reflexiones y rotaciones; en dimensión 3 no hay nuevos tipos de simetría, sólo tenemos reflexiones y rotaciones; en dimensión 4 tenemos reflexiones, rotaciones y nuevas simetrías llamadas desplazamientos de Clifford; en dimensiones 5, 6 y 7 tenemos las mismas simetrías que en dimensión cuatro; etcétera.

Más aún, también existen relaciones insospechadas con otras áreas de las matemáticas y las ciencias. La retícula Leech fue descubierta por John Leech en 1967 y está inmersa en un espacio de dimensión 24. Dentro de sus aplicaciones se encuentran el código binario Golay de comunicaciones, capaz de corregir hasta tres errores en una palabra de 24 bits; y también es uno de los elementos básicos usados por el matemático Richard Borcherds para demostrar la conjetura *monstrous moonshine.*

Por cierto, Borcherds recibió la medalla Fields (un equivalente al premio Nobel en matemáticas) en 1998, en parte por haber demostrado esta conjetura. *Moonshine* se usa con un doble significado: se puede traducir como luz de luna o aguardiente destilado ilegalmente. Pero de la conjetura *monstrous moonshine* tendremos que platicar otro día… con un buen aguardiente de por medio. C²